

éducation | conférences | évènements
la médiation scientifique
ateliers | animations | formation | exposés

cité

**sciences
et industrie**

Mission spatiale

Les orbites de transfert de Hohmann



Département Éducation et Formation
educ-formation@universcience.fr

2023

Les orbites de transfert de Hohmann

1.	Présentation du problème	2
2.	Orbite de transfert géostationnaire	2
3.	Orbite de transfert interplanétaire	7
4.	Lancer, oui... mais quand ?	9

1. Présentation du problème

Quelle trajectoire une sonde lancée depuis la Terre doit-elle suivre pour atteindre l'orbite géostationnaire ? la Lune ? la planète Mars ?

Intuitivement, on pourrait penser que la ligne droite est le moyen le plus efficace pour atteindre un corps céleste. Il suffirait de viser celui-ci avec une fusée suffisamment puissante pour s'extraire de l'attraction terrestre puis contrebalancer continûment l'attraction variable du Soleil (variable car sa distance à la fusée changerait en permanence) de telle sorte que la trajectoire de la fusée demeure rectiligne. Enfin, il faudrait réduire considérablement sa vitesse à l'approche du corps céleste visé, pour une mise en orbite voire un atterrissage direct. Le cœur du problème mis en évidence par une telle stratégie est qu'elle peut-être si gourmande en carburant qu'elle en devient irréalisable ou beaucoup trop coûteuse avec les technologies actuelles de propulsion. Il est bien plus préférable de mettre à profit les lois de la mécanique céleste.

Walter Hohmann (1880 – 1945) était un ingénieur allemand, pionnier de l'astronautique. Dans son ouvrage *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper (L'atteignabilité des corps célestes, 1925)*, Hohmann développa une étude sur les trajectoires possibles d'un satellite que l'on cherche à déplacer d'une orbite à une autre. Il en trouva une particulièrement économe en carburant, à laquelle on donna plus tard le nom d'*orbite de transfert de Hohmann*, en hommage à son inventeur. Il s'agit une trajectoire elliptique qui permet de passer d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire située dans le même plan, en utilisant seulement deux impulsions. Cette trajectoire est celle consommant le moins d'énergie possible.

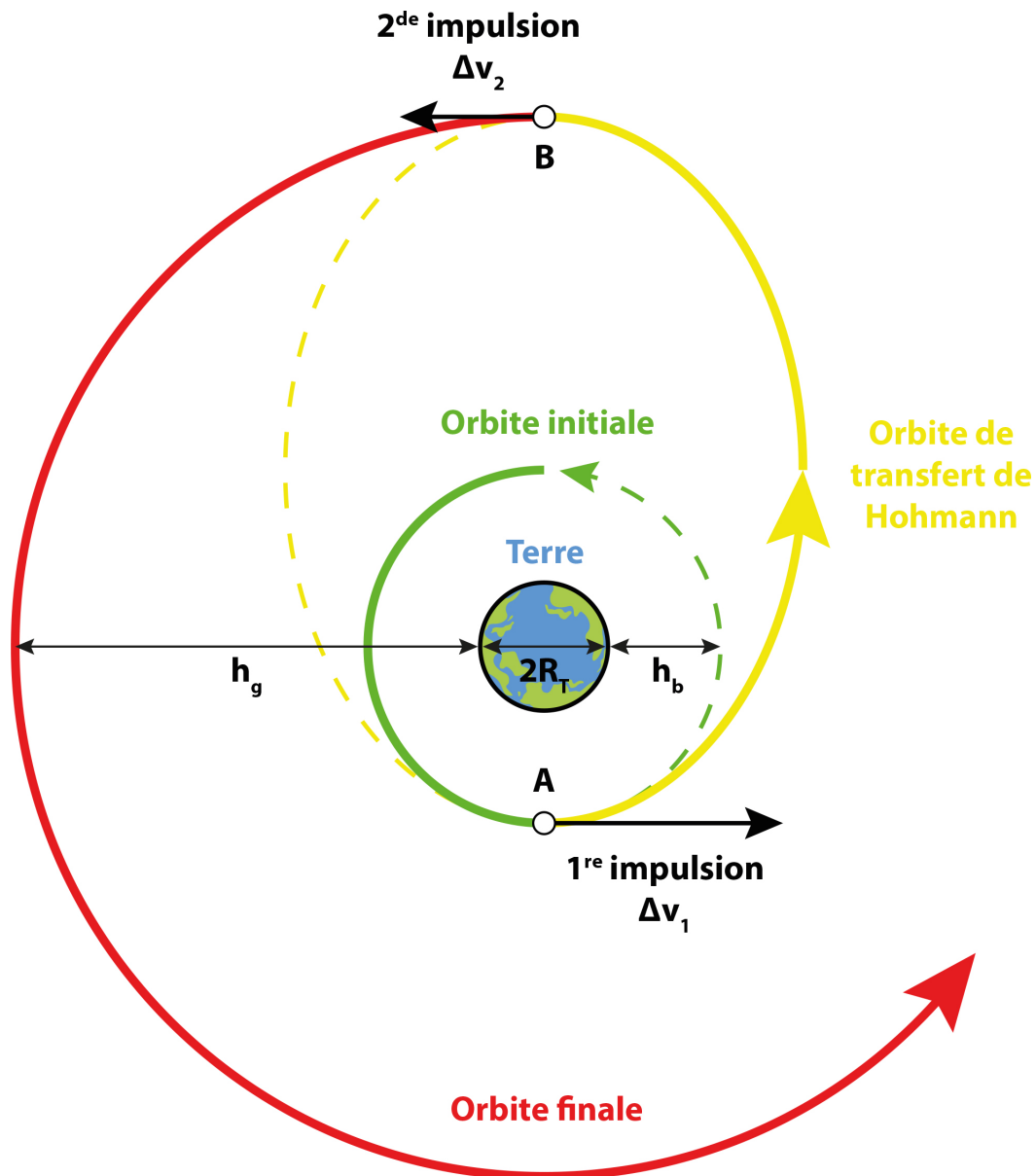
2. Orbite de transfert géostationnaire

On considère un satellite artificiel placé en orbite basse autour de la Terre, à une altitude h_b proche de 200 km. Il s'agit d'une orbite d'attente. On suppose que la trajectoire est circulaire et située dans le plan équatorial terrestre. On souhaite transférer ce satellite sur une orbite géostationnaire, de telle manière qu'il reste en permanence au-dessus du même point de l'équateur et que donc sa période orbitale soit égale à la période de rotation de notre planète.

Dans cette situation, l'orbite de transfert de Hohmann est la trajectoire permettant de passer de l'orbite basse à l'orbite géostationnaire en utilisant uniquement deux impulsions consommant le moins de carburant possible. Il s'agit d'une ellipse tangente aux trajectoires initiale et finale.

La première impulsion, tangentielle à la trajectoire, est appliquée au point A. Elle se traduit par un changement de vitesse Δv_1 . De circulaire, l'orbite devient elliptique, de périégée A et d'apogée B. Ce point B se trouve sur l'orbite circulaire finale que l'on cherche à obtenir. Aussi, en B, une seconde impulsion tangentielle à la trajectoire est fournie et se traduit par un changement de vitesse Δv_2 , pour circulariser l'orbite à une altitude h_g .

Peut-on calculer les caractéristiques de l'ellipse de transfert géostationnaire, le temps du trajet pour atteindre l'orbite géostationnaire ainsi que Δv_1 et Δv_2 ?



Caractéristiques de l'ellipse de transfert géostationnaire

Son demi-grand axe a vaut $a = \frac{1}{2} (h_g + R_T + h_b + R_T) = \frac{1}{2} (h_g + h_b + 2R_T)$.

Dans le repère défini par le foyer F , occupé par la Terre et l'axe focal, l'équation polaire de l'ellipse est :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où p et e sont le paramètre et l'excentricité de l'ellipse.

Évaluons cette expression en A , où $r = R_T + h_b$ et $\theta = 0$. Il vient :

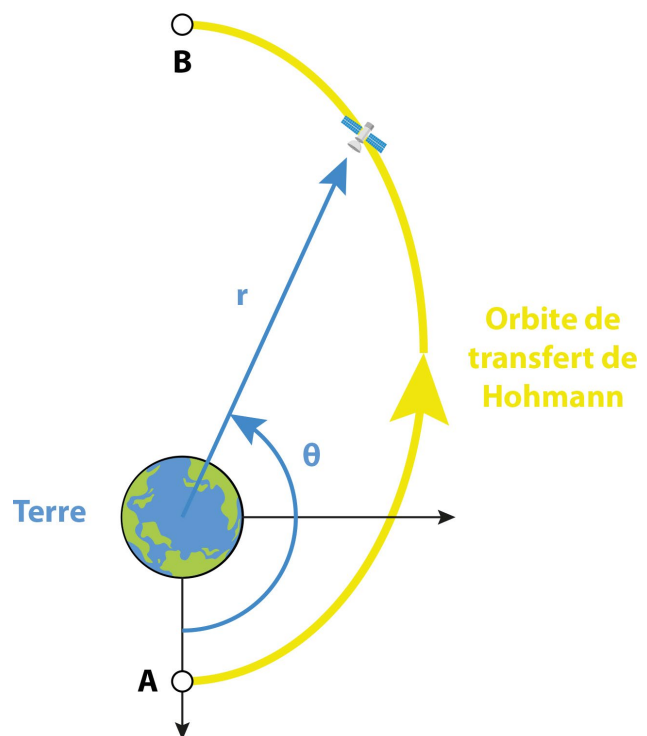
$$R_T + h_b = \frac{p}{1 + e}$$

Évaluons maintenant cette expression en B , où $r = R_T + h_g$ et $\theta = \pi$. Il vient :

$$R_T + h_g = \frac{p}{1 - e}$$

Le rapport membre à membre de ces deux expressions donne, après simplification :

$$e = \frac{h_g - h_b}{2R_T + h_b + h_g}$$



Nous connaissons a et e , nous pouvons en déduire le demi-petit axe b à l'aide de la formule :

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

L'ellipse est maintenant caractérisée. Passons aux applications numériques.

h_b est donné par l'énoncé et vaut 200 km. Le rayon équatorial de la Terre s'élève à 6 378 km. Il nous reste à calculer h_g , c'est-à-dire l'altitude de l'orbite géostationnaire.

Notre petit satellite de masse m , en orbite circulaire de rayon $h_g + R_T$ autour de la Terre (de masse M_T), est soumis à une force d'origine gravitationnelle dont la norme F_g est :

$$F_g = G \frac{mM_T}{(h_g + R_T)^2}$$

où G est la constante gravitationnelle ($\approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$).

Dans un repère lié au satellite, celui-ci subit une force centrifuge de norme F_c :

$$F_c = m \frac{v^2}{h_g + R_T}$$

où v est sa vitesse qui, sur une orbite circulaire décrite avec une période T , vaut :

$$v = 2\pi \frac{h_g + R_T}{T}$$

De l'égalité $F_g = F_c$, on déduit après simplification :

$$h_g = \sqrt[3]{T^2 \frac{GM_T}{4\pi^2}} - R_T$$

Avec $T \approx 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s} \approx 86\,164 \text{ s}$ et $GM_T \approx 3,986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$, il vient $h_g \approx 35\,786 \text{ km}$.

Finalement, on obtient $a \approx 24\,371 \text{ km}$ ($\approx 3,82 R_T$), $e \approx 0,730$ et $b \approx 16\,654 \text{ km}$ ($\approx 2,61 R_T$)

Au passage, il est intéressant de noter que dans le Système solaire, le produit GM , que l'on appelle le *paramètre gravitationnel standard*, est généralement connu avec une précision supérieure à celle associée à chacun des deux facteurs G et M . La page suivante recense sa valeur pour le Soleil et les huit planètes du Système solaire :

https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_gravitational_parameter

Durée du transfert géostationnaire

La durée du transfert vaut la moitié de la période d'un corps qui parcourrait la totalité de l'orbite elliptique.

Nous allons, pour calculer cette période, utiliser la 3^e loi de Kepler qui nous dit que dans notre problème, la quantité a^3/T^2 est constante pour tous les objets en orbite autour d'un même corps céleste.

Si le couple (a, T) caractérise l'orbite circulaire géostationnaire et le couple (a', T') l'orbite de transfert elliptique, on a :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2}$$

d'où

$$T' = T \left(\frac{a'}{a} \right)^{\frac{3}{2}}$$

avec $a' = \frac{1}{2} (h_g + h_b + 2R_T)$, $a = h_g + R_T$ et $T \approx 86\,164 \text{ s}$. On obtient donc $T' \approx 10 \text{ h } 31 \text{ min}$.

La durée du transfert vaut la moitié de cette période, soit environ 5 h 16 min.

Calcul de Δv_1 et Δv_2

On montre que dans une trajectoire elliptique, l'énergie mécanique E_m du satellite ne dépend que du demi-grand axe de l'ellipse et s'exprime par la formule :

$$E_m = -G \frac{mM_T}{2a}$$

L'énergie mécanique du satellite est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle. Ainsi :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM_T}{r}$$

En égalant les deux expressions de l'énergie mécanique, il vient après simplification :

$$v(r) = \sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{h_g + h_b + 2R_T} \right)}$$

Au point A (au périégée), on a $r = R_T + h_b$ et au point B, $r = R_T + h_g$. L'application numérique donne $v_{\text{périégée}} \approx 10,24 \text{ km.s}^{-1}$ et $v_{\text{aphélie}} \approx 1,60 \text{ km.s}^{-1}$.

Nous venons de calculer les vitesses du satellite au périégée et à l'apogée de son orbite de transfert elliptique. Pour déterminer les accroissements de vitesse qu'il convient de lui communiquer lors de ses changements d'orbite, il nous reste à calculer ses vitesses aux points A et B sur des orbites circulaires. Pour ceci, il nous suffit d'égaliser la force centrifuge et la force gravitationnelle s'appliquant sur le satellite le long de son orbite circulaire.

En écrivant de manière générale que, sur un cercle de rayon d décrit autour de la Terre, on a la relation :

$$F_g = G \frac{mM_T}{d^2} = F_c = m \frac{v^2}{d}$$

On isole v , ce qui donne :

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{d}}$$

En A (c'est-à-dire avec $d = R_T + h_b$), $v \approx 7,78 \text{ km.s}^{-1}$.

En B (c'est-à-dire avec $d = R_T + h_g$), $v \approx 3,07 \text{ km.s}^{-1}$.

Synthèse

Notre satellite tourne autour de la Terre sur une orbite circulaire d'attente à 200 km d'altitude, à la vitesse de $7,78 \text{ km.s}^{-1}$. Au point *A*, on lui communique un supplément de vitesse tangentielle de $10,24 - 7,78 = 2,45 \text{ km.s}^{-1}$. Il entame alors une demi-orbite de transfert elliptique, qu'il parcourt en 5 h 16 min et arrive au point *B*. Là, on lui prodigue un supplément de vitesse tangentielle de $3,07 - 1,60 = 1,48 \text{ km.s}^{-1}$ pour circulariser son orbite à une altitude de 35 786 km, où il sera en mesure de demeurer toujours au-dessus du même point de l'équateur.

Dans la réalité, les choses sont moins simples. Les satellites ne sont généralement pas lancés depuis l'équateur (la latitude du centre spatial guyanais à Kourou est de 5° N , celle de la base de lancement de Cap Canaveral de $28^\circ,5 \text{ N}$ et celle du cosmodrome de Baïkonour de 47° N). Aussi, le plan contenant l'orbite d'attente est incliné par rapport au plan équatorial et, si l'on souhaite obtenir une orbite géostationnaire, il convient d'annuler cette inclinaison en propulsant le satellite jusqu'à son orbite géostationnaire à l'instant où il passe au-dessus de l'équateur. Des difficultés supplémentaires entrent en jeu : le léger aplatissement de la Terre aux pôles conduit à une déformation de l'orbite (son plan tourne lentement autour de l'axe des pôles, le périégée se déplace...), le champ de gravité de notre planète n'est pas homogène, l'atmosphère terrestre exerce des frottements spatialement et temporellement variables sur le satellite, le rayonnement solaire exerce une pression sur ce dernier...

3. Orbite de transfert interplanétaire

Changeons d'échelle et partons à la conquête de la planète Mars à l'aide d'une sonde spatiale ! Nous n'allons refaire toutes les étapes du calcul, mais simplement les adapter aux nouvelles données :

- 1) La source des forces gravitationnelles réside maintenant dans le Soleil, de masse M_S et de rayon $R_s \approx 700\,000 \text{ km}$. Notre étoile joue désormais le rôle que la Terre jouait dans le paragraphe précédent ;
- 2) Comme orbite « d'attente », nous choisissons l'orbite terrestre, supposée circulaire pour simplifier le problème. On lui donne un rayon de 149,6 millions de kilomètres. La distance h_b vaut maintenant $149,6 - 0,7 = 148,9$ millions de kilomètres. Nous lui donnons désormais le nom de h_T ;
- 3) L'orbite visée est celle de Mars, que là aussi, nous supposons circulaire et centrée sur le Soleil (tant s'en faut pourtant puisque son excentricité se monte presque à 0,1) et de rayon 227,9 millions de kilomètres. La distance h_g vaut maintenant $227,9 - 0,7 = 227,2$ millions de kilomètres. Nous lui donnons désormais le nom de h_M ;
- 4) Le produit GM_S a s'élève à $1,327 \cdot 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ (nous vous faisons grâce des nombreuses décimales qui suivent). L'incertitude relative sur la valeur est inférieure à 10^{-15} ;
- 5) La période T est la période de révolution T_M de Mars autour du Soleil, soit 686,980 jours de 24 h.

Il faut toutefois garder à l'esprit que lorsque l'on traite de l'orbite de transfert de Hohmann vers Mars, on ne considère qu'une seule source de gravité (le Soleil) et l'on néglige les deux autres sources que sont la Terre et Mars. Aussi, le transfert de Hohmann ne décrit que la trajectoire de la sonde hors des sphères d'influence de la Terre et de Mars... ce qui correspond tout de même à une très grande partie de la trajectoire finale, sachant que la sphère d'influence de notre planète ne s'élève qu'à moins de 1 000 000 de kilomètres et celle de Mars, à un peu plus de 500 000 km. Voir ici pour en savoir plus :

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Sph%C3%A8re_d%27influence_\(astrodynamique\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Sph%C3%A8re_d%27influence_(astrodynamique))

L'avantage du calcul est de mettre en évidence les fenêtres de lancement.

Voici les caractéristiques de l'ellipse de transfert :

$a = 188,75$ millions de kilomètres

$e = 0,207$

$b = 184,65$ millions de kilomètres

Durée du transfert vers l'orbite de Mars

Si le couple (a, T) caractérise l'orbite de Mars et le couple (a', T') l'orbite de transfert elliptique, on a :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2}$$

d'où

$$T' = T \left(\frac{a'}{a} \right)^{\frac{3}{2}}$$

avec $a' = \frac{1}{2} (h_M + h_T + 2R_S)$, $a = h_M + R_S$ et $T \approx 686,98$ j. On obtient donc $T' \approx 517,80$ j.

La durée du transfert vaut la moitié de cette période, soit environ 258,90 j (huit mois et demi).

Gardons bien en tête que l'alignement des deux planètes sur leurs orbites est crucial : la planète visée et la sonde spatiale doivent arriver au même point de leur orbite respective autour du Soleil en même temps. Cette exigence donne naissance au concept de *fenêtre de lancement*. Dans le cas d'un lancement vers Mars, la fenêtre de lancement ne s'ouvre que tous les 26 mois, comme nous le verrons bientôt.

Calcul de Δv_1 et Δv_2

$$v(r) = \sqrt{2GM_S \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{h_M + h_T + 2R_S} \right)}$$

Au périhélie, on a $r = R_S + h_T$ et à l'aphélie, $r = R_S + h_M$. L'application numérique donne $v_{\text{périhélie}} \approx 32,73 \text{ km.s}^{-1}$ et $v_{\text{aphélie}} \approx 21,48 \text{ km.s}^{-1}$.

Sur une orbite circulaire, on a :

$$v = \sqrt{\frac{GM_S}{d}}$$

Au périhélie (c'est-à-dire au niveau de l'orbite terrestre), avec $d = R_S + h_T$, $v \approx 29,78 \text{ km.s}^{-1}$.
À l'aphélie (c'est-à-dire au niveau de l'orbite martienne), avec $d = R_S + h_M$, $v \approx 24,13 \text{ km.s}^{-1}$.

Synthèse

La sonde spatiale accompagne la Terre dans sa course autour du Soleil, à la vitesse de $29,78 \text{ km.s}^{-1}$ dans un référentiel lié au Soleil. On lui communique un supplément de vitesse tangentielle de $32,73 - 29,78 = 2,94 \text{ km.s}^{-1}$. Elle entame alors une demi-orbite de transfert elliptique, qu'elle parcourt en 258,9 jours et arrive au niveau de l'orbite martienne. Là, on lui prodigue un supplément de vitesse tangentielle de $24,13 - 21,48 = 2,65 \text{ km.s}^{-1}$ pour circulariser son orbite autour du Soleil à une distance de 227,9 millions de kilomètres. La voici prête à entamer une série de manœuvres complexes pour se mettre en orbite autour de la planète Rouge !

4. Lancer, oui... mais quand ?

Représentons graphiquement la situation que nous venons d'étudier. Le Soleil S est au centre. La Terre T (resp. Mars M) et sa trajectoire supposée circulaire autour du Soleil sont en bleu (resp. orange). L'orbite de transfert de Hohmann est en vert.

$T1$ représente la Terre au moment du lancement de la sonde spatiale.

$M2$ représente Mars au moment de l'arrivée de la sonde spatiale.

Enfin, en vert, apparaît la trajectoire (légèrement) elliptique de transfert de Hohmann entre la Terre et Mars.

Il serait intéressant de connaître la position $M1$ de Mars à l'instant du lancement. Autrement dit, quelle doit être la configuration Terre – Mars à l'instant du lancement, pour que notre sonde et la planète Rouge arrivent conjointement en $M2$?

Le référentiel dans lequel nous nous plaçons est le référentiel héliocentrique. L'origine du repère se trouve au centre du Soleil et ses trois axes (X , Y et Z) pointent vers des étoiles suffisamment lointaines pour être considérées comme fixes. Les trajectoires de la Terre, de Mars et de la sonde étant supposées appartenir au même plan, on identifie ce plan au plan formé par les axes X et Y . Enfin, par raison de commodité, on place le repère de telle façon que $T1$ appartienne à l'axe X .

L'angle qui va nous servir à repérer la position des planètes le long de leur orbite est λ , défini comme l'angle entre l'axe X et la direction de la planète, vu depuis le centre du Soleil. Par définition, on a $\lambda_{T1} = 0^\circ$. On a aussi $\lambda_{M2} = 180^\circ$.

Où était la planète Mars au moment du lancement ? En supposant les mouvements décrits à vitesse uniforme, on obtient :

$$\lambda_{M1} = \lambda_{M2} - 360^\circ \frac{T_{trans}}{T_M} = 180^\circ - 360^\circ \frac{T_{trans}}{T_M}$$

où T_{trans} est la durée du transfert (258,90 j) et T_M la période de révolution de Mars autour du Soleil (686,98 j). Le calcul donne $\lambda_{M1} \approx 44^\circ,33$.

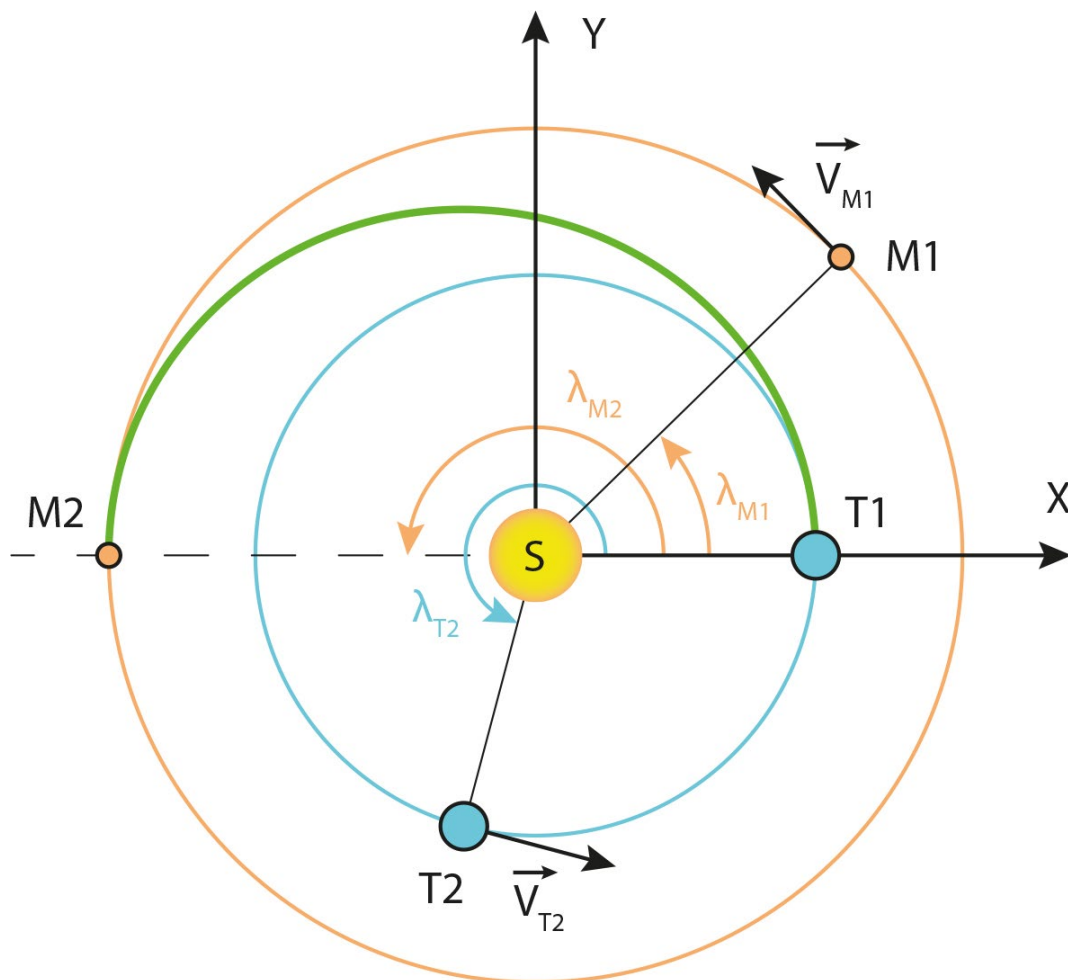
De même, où sera la Terre lors de l'arrivée de la sonde sur Mars ?

$$\lambda_{T2} = \lambda_{T1} + 360^\circ \frac{T_{trans}}{T_T} = 360^\circ \frac{T_{trans}}{T_T}$$

où T_T est la période de révolution de la Terre autour du Soleil (365,26 j).

Le calcul donne $\lambda_{T2} \approx 255^\circ,17$.

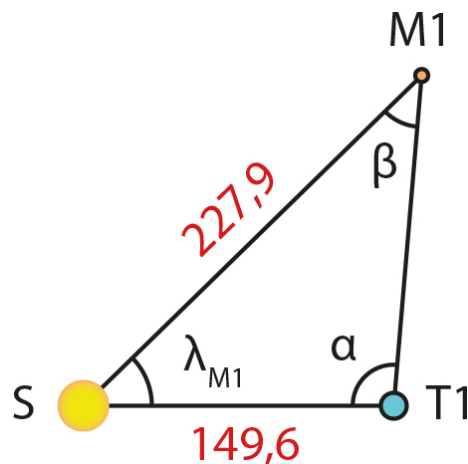
Nous pouvons alors placer les deux planètes sur le graphique, à l'instant du lancement de la sonde et à l'instant de son arrivée sur Mars.



Il pourrait être aussi intéressant de connaître, pour nous observateurs terrestres, l'écart angulaire entre le Soleil et la planète Mars à ces deux instants, observé depuis la Terre.

- Au lancement

Sur la figure suivante, il convient donc de déterminer l'angle α , connaissant la distance Soleil-Terre ST_1 , la distance Soleil-Mars SM_1 et l'angle λ_{M_1} .



Utilisons pour cela la loi des cosinus, que l'on appelle également théorème d'Al-Kashi ou théorème de Pythagore généralisé :

$$T_1M_1^2 = SM_1^2 + ST_1^2 - 2 \cdot SM_1 \cdot ST_1 \cdot \cos \lambda_{M_1}$$

Avec les valeurs numériques, l'expression donne $T_1M_1 \approx 159,82$ millions de kilomètres. Il nous reste à calculer l'angle α .

$$SM_1^2 = ST_1^2 + T_1M_1^2 - 2 \cdot ST_1 \cdot T_1M_1 \cdot \cos \alpha$$

Il vient :

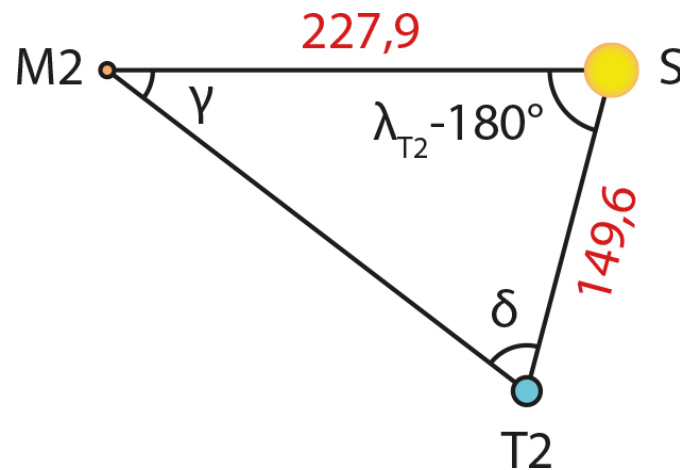
$$\cos \alpha = \frac{ST_1^2 + T_1M_1^2 - SM_1^2}{2 \cdot ST_1 \cdot T_1M_1}$$

d'où $\alpha \approx 94^\circ,82$.

Ainsi, dans notre ciel, à l'instant du lancement, Mars et le Soleil sont séparés par un angle un peu supérieur à l'angle droit. Mars, à l'ouest du Soleil, sera alors visible à l'œil nu sous la forme d'un point couleur caramel se levant environ 6 h avant notre étoile. Elle sera observable en seconde partie de nuit et au petit matin.

- À l'arrivée de la sonde sur Mars

Il convient maintenant de déterminer l'angle δ , connaissant la distance Soleil-Terre $ST1$, la distance Soleil-Mars $SM1$ et l'angle λ_{T2} .



Utilisons encore une fois la loi des cosinus :

$$T2M2^2 = SM2^2 + ST2^2 - 2 \cdot SM2 \cdot ST2 \cdot \cos(\lambda_{T2} - 180^\circ)$$

Or, $\cos(\lambda_{T2} - 180^\circ) = -\cos(\lambda_{T2})$, donc :

$$T2M2^2 = SM2^2 + ST2^2 + 2 \cdot SM2 \cdot ST2 \cdot \cos(\lambda_{T2})$$

Avec les valeurs numériques, $T2M2 \approx 238,47$ millions de kilomètres. Il nous reste à calculer l'angle δ .

$$SM2^2 = ST2^2 + T2M2^2 - 2 \cdot ST2 \cdot T2M2 \cdot \cos \delta$$

Il vient :

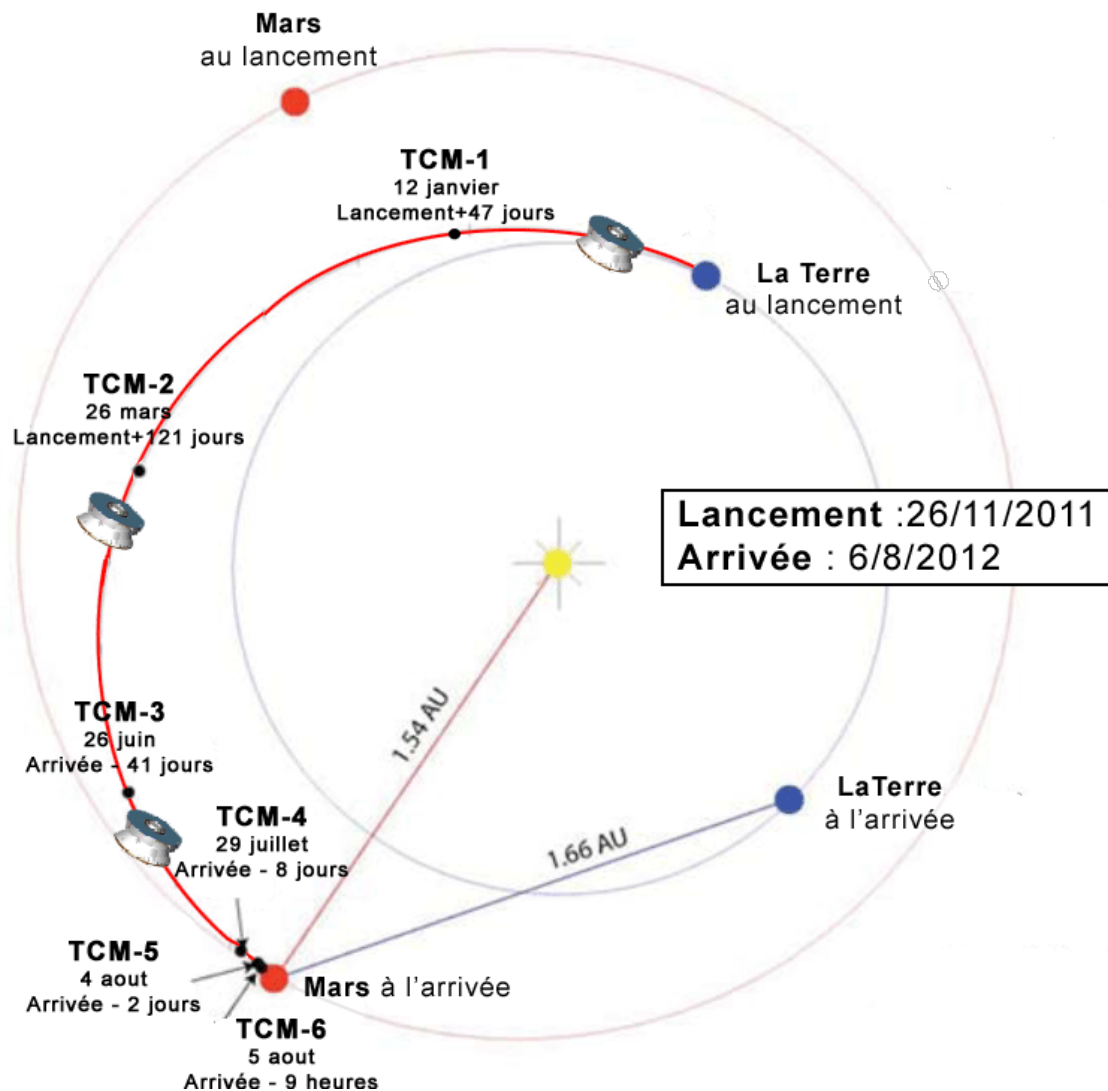
$$\cos \delta = \frac{ST2^2 + T2M2^2 - SM2^2}{2 \cdot ST2 \cdot T2M2}$$

d'où $\delta \approx 67^\circ,50$.

Ainsi, dans notre ciel, à l'instant de l'arrivée de la sonde sur Mars, Mars et le Soleil sont séparés par un angle d'environ $67^\circ,5$. Mars, à l'est du Soleil, sera alors visible à l'œil nu sous la forme d'un point couleur caramel se couchant 4 à 5 h après notre étoile. Elle sera observable en soirée et en première partie de nuit.

Pour terminer cette petite étude, le schéma ci-dessous présente le déroulement réel du transit de la mission *Mars Science Laboratory* (qui embarquait l'astromobile *Curiosity*) entre la Terre et Mars. Elle fut lancée le 26 novembre 2011. L'atterrissage de l'astromobile prit place le 6 août 2012, après un voyage de 254 jours – une durée proche de celle calculée plus haut. En ce jour, la distance Terre-Mars valait 1,66 unité astronomique, soit $1,66 \times 149,6 \approx 248$ millions de kilomètres, une valeur comparable aux 238,47 millions de kilomètres que nous avons estimés.

Six corrections de trajectoire (notées TCM-1 à TCM-6, pour *Trajectory correction maneuver*) ont été effectuées. Elles avaient pour but, par exemple, de corriger les erreurs d'insertion sur la trajectoire interplanétaire, de supprimer le biais introduit volontairement pour éviter la retombée de l'étage *Centaur* sur Mars (il s'agit du nom du deuxième étage de la fusée *Atlas V* ayant lancé la mission), etc.



Crédit : <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MSL-Transit-Earth-Mars.png>.